Primer Nivel

109. Sea *ABC* un triángulo acutángulo con sus tres vértices en una circunferencia de radio 2. Demostrar que se pueden elegir puntos *E*, *F*, *G* en los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, respectivamente, tales que el valor del área del hexágono *AEBFCG* sea igual al valor del perímetro del triángulo *ABC*.

Segundo Nivel

209. Se tiene un polígono convexo de 2009 lados al que se le trazaron todas las diagonales. Se traza una recta que corta al polígono y no pasa por ninguno de sus vértices. Demostrar que esta recta corta a un número par de diagonales del polígono.

ACLARACIÓN: Un polígono se dice convexo si todos sus ángulos interiores miden menos de 180º.

Tercer Nivel

309. Sea *ABCD* un rombo de lados *AB*, *BC*, *CD*, *DA* con $D\hat{A}B = 120^{\circ}$. Se consideran puntos *M* y *N* de los lados *BC* y *CD* respectivamente tales que $N\hat{A}M = 30^{\circ}$. Demostrar que el circuncentro del triángulo *NAM* pertenece a una diagonal del rombo.

ACLARACIÓN: El circuncentro del triángulo *NAM* es el centro de la circunferencia que pasa por *N*, *A* y *M*.

Primer Nivel

110. Hallar el menor entero positivo tal que la suma de sus dígitos es igual a 2009 y el producto de sus dígitos es igual a 30^{17}.

Segundo Nivel

210. Sea *ABCD* un trapecio de bases *AB* y *CD*, y lados no paralelos *BC* y *DA*. Los ángulos $B\hat{C}D$ y $C\hat{D}A$ son agudos. Las rectas *BC* y *DA* se cortan en *E*. Se sabe que *AE* = 2, *AC* = 6, $CD = \sqrt{72}$ y área(*BCD*) = 18. Hallar el área del triángulo *ABC*.

Tercer Nivel

310. Calcular el valor de la expresión

$$A=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{100}-\frac{1}{100^2}-\frac{1}{100^3}\right)$$

donde se han multiplicado las 99 expresiones de la forma $\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^3}\right)$ para todos los enteros *k* desde 2 hasta 100 inclusive.

Primer Nivel

111. Ana y Beto juegan al siguiente juego: Ana escribe un 1 o un 2, y luego agrega un 1 o un 2 a la derecha de los números ya escritos, hasta que haya 2009 de estos dígitos. Después de que Ana escribe cada dígito (excepto el primero), Beto elige dos dígitos entre los que ya están escritos hasta ese momento y los intercambia.

Si el número final es capicúa, gana Beto; si no, gana Ana.

Determinar cuál de los dos tiene estrategia ganadora y dar dicha estrategia.

Segundo Nivel

211. Un club de tenis organiza un torneo de 32 jugadores. Todos juegan contra todos exactamente un partido. Al finalizar el torneo, quienes hayan ganado más partidos de los que perdieron, reciben una medalla. ¿Cuál es la menor cantidad de medallas que debe comprar el club para asegurarse de que serán suficientes?

Tercer Nivel

311. Sea *ABCD* un cuadrado y *E* un punto del lado *BC*. El segmento *AE* corta a la diagonal *BD* en *G*. Sea *F* en el lado *CD* tal que *FG* es perpendicular a *AE*, y sea *K* en *FG* tal que *AK* = *FE*. Calcular la medida del ángulo $F\hat{K}E$.

Primer Nivel

112. Sea *ABC* un triángulo con $\hat{B}=3\hat{A}$ y $\hat{C}=5\hat{A}$. Los puntos *D*, *E*, *F* de los lados *BC*, *CA* y *AB*, respectivamente, son tales que *AE* = *AF*, *BD* = *BF* y *CD* = *CE*. Calcular los ángulos del triángulo *DEF*.

Segundo Nivel

212. Encontrar números primos *p*, *q*, *r* para los cuales sea $p+q^2+r^3=200$. Dar todas las posibilidades.

Tercer Nivel

312. Sea *m* un entero positivo y *U* el número formado por *m* dígitos 1: $U = \underbrace{11...1}_{m \text{ veces}}$. Si $A > 0$ es un múltiplo de *U*, determinar el menor valor que puede tener la suma de los dígitos de *A*.

Primer Nivel

113. Se tienen 26 tarjetas y cada una tiene escrito un número. Hay dos con el 1, dos con el 2, dos con el 3, y así siguiendo hasta dos con el 12 y dos con el 13. Hay que distribuir las 26 tarjetas en pilas de manera que se cumplan las dos condiciones siguientes:

- Si dos tarjetas tienen el mismo número están en la misma pila.
- Ninguna pila contiene una tarjeta cuyo número es igual a la suma de los números de dos tarjetas de esa misma pila.

Determinar cuál es el mínimo número de pilas que hay que hacer.

Segundo Nivel

213. Inicialmente en el pizarrón está escrito el número 1. En cada paso, se borra el número del pizarrón y se escribe otro, que se obtiene aplicando una cualquiera de las siguientes operaciones:

- Operación A: Multiplicar el número del pizarrón por $\frac{1}{2}$.
- Operación B: Restarle al 1 el número del pizarrón.

Por ejemplo, si en el pizarrón está el número $\frac{3}{8}$ se lo puede reemplazar por $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$ o por $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Dar una secuencia de pasos al cabo de los cuales el número del pizarrón sea $\frac{2009}{2^{2009}}$.

Tercer Nivel

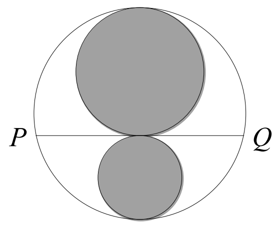
313. Hallar todas las parejas de enteros positivos *x*, *y* tales que

$$\frac{xy^2}{x+y}$$

es un número entero primo.

Primer Nivel

114. Tres circunferencias son tangentes entre sí, tal y como se muestra en la figura.



La región del círculo exterior que no está cubierta por los dos círculos interiores tiene área igual a 2π.

Determinar la longitud del segmento *PQ*.

Segundo Nivel

214. Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo tal que el triángulo *ABD* es equilátero y el triángulo *BCD* es isósceles, con $\hat{C} = 90^\circ$. Si *E* es el punto medio del lado *AD*, calcular la medida del ángulo $C\hat{E}D$.

Tercer Nivel

314. En los vértices de un polígono regular de 31 lados se escribieron los números enteros del 1 al 31, sin repetir, ordenados en forma creciente en el sentido de las agujas del reloj.

La *operación permitida* consiste en borrar los tres números de tres vértices, *a*, *b*, *c*, a elección, y reemplazarlos, respectivamente, por *c*, $a - \frac{1}{10}$, $b + \frac{1}{10}$.

Demostrar que usando repetidas veces operaciones permitidas es posible lograr que los números asignados a los vértices sean los enteros del 1 al 31, sin repetir, ordenados en forma creciente en el sentido contrario al de las agujas del reloj

ACLARACIÓN: En cada operación, los vértices elegidos no son necesariamente consecutivos ni están necesariamente ordenados. Por ejemplo, en la primera operación se podría reemplazar 3, 14, 1 por 1, $3 - \frac{1}{10} = \frac{29}{10}$, $14 + \frac{1}{10} = \frac{141}{10}$, respectivamente.

Primer Nivel

115. Por las líneas de una cuadrícula formada por 55 líneas horizontales y 45 líneas verticales camina una hormiga. Se quiere pintar algunos tramos de líneas para que la hormiga pueda ir de cualquier cruce hasta cualquier otro cruce, caminando exclusivamente por tramos pintados. Si la distancia entre líneas consecutivas es de 10 cm, ¿cuál es la menor cantidad posible de centímetros que se deberán pintar?

Segundo Nivel

215. Freddy escribió en cada casilla de un tablero de 10×10 un número entero del 1 al 10 inclusive, de modo que los números de casillas adyacentes (con un lado o un vértice común) son coprimos. Demostrar que hay un número que se repite al menos 17 veces.

ACLARACIÓN: Dos números son coprimos si su máximo común divisor es 1.

Tercer Nivel

315. Se tiene un conjunto de N pesas todas de pesos enteros y distintos, desde 1 gramo hasta

N gramos. Hay que elegir varias de ellas (más de una) de modo que el peso total de las elegidas sea igual al peso promedio de las no elegidas. Demostrar quesi $N + 1$ es un cuadrado perfecto entonces se puede lograr el objetivo

Primer Nivel

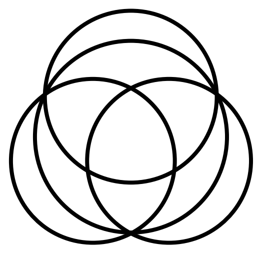
116. En una isla viven 200 personas: 100 *sinceros*, que siempre dicen la verdad, y 100 *mentirosos*, que siempre mienten. Cada una tiene por lo menos una persona amiga en la isla. Cierto día, 100 personas afirmaron, cada una, “todos mis amigos son sinceros” y las otras 100 personas afirmaron, cada una, “todos mis amigos son mentirosos”. Si se forman todos los pares de amigos integrados por una persona sincera y la otra mentirosa, determinar la menor cantidad de estos pares que puede haber.
ACLARACIÓN: Si A es amigo de B, entonces B es amigo de A. Cada persona puede integrar más de un par.

Segundo Nivel

216. En un tablero cuadrado de 50×50 se marcan los centros de varias casillas de modo que no haya tres puntos marcados que sean los vértices de un triángulo rectángulo. ¿Cuál es el máximo número de centros que puede haber marcados?

Tercer Nivel

316. Los cuatro círculos de la figura determinan 10 regiones acotadas. En estas regiones se escriben 10 números enteros positivos distintos que sumen 100, un número en cada región. La suma de los números contenidos en cada círculo es igual a S (la misma para los cuatro círculos). Determinar el mayor y el menor valor posible de S.



Primer Nivel

117. Hallar un polígono con la siguiente propiedad: el polígono se puede dividir en dos partes iguales mediante una recta que divide a uno de los lados del polígono por la mitad y a otro de los lados en la proporción 1 : 2. ¿Existe un polígono convexo con estas propiedades?

Segundo Nivel

217. Determinar si es posible cubrir un cuadrado de lado 2,1 con 7 cuadrados de lado 1. (Los cuadrados de lado 1 se pueden girar y pueden superponerse.)

Tercer Nivel

317. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$. Sean I el incentro de ABC y P el otro punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo A con el circuncírculo de ABC. La recta PI interseca por segunda vez al circuncírculo de ABC en el punto J. Demostrar que los circuncírculos de los triángulos JIB y JIC son tangentes a las rectas IC e IB, respectivamente.